

# 高等数学习题选讲

## Question 1 函数与极限 – 极限的性质

已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 求  $a$ 。

解 由题意可得此函数极限存在;

此条件等价于:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = C$ ;

因此有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a$ ;

即可解得  $a = 1$ 。

## Question 2 函数与极限 – 极限的求解

2-1 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 + 4x + 2}$ 。

解 注意到自变量在此处不为 0, 根据极限的四则运算, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 + 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{1}{3}$$

2-2 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{x^3 - 2x + 3}$ 。

解 注意到自变量在此处不为 0, 根据极限的四则运算, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{x^3 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = 0$$

规律 自变量不为 0 时可将分子分母同时除以相同的高次幂, 再根据函数极限的四则运算分别求解

2-3 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{3x^2 - 1}$ ;

解 显然有  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin x}{x}}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)} = 0$

2-4 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 - 3}$ ;

解 上下分别求极限, 有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3)} = \frac{0}{3} = 0$

2-5 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(1+x)}$

解 上下分别求极限, 有  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(1+x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} [\ln(1+x)]} = \frac{0}{\ln 2} = 0$

规律 在分子、分母均为基本初等函数且明显有极限的情况下可分子、分母分别求极限。

2-6 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$  ( $n, m$  为正整数)。

解 注意到此处自变量  $x$  趋近于 0, 因此考虑等价无穷小性质进行替换, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{n-m});$$

下面考察  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{n-m})$  的存在性, 记  $f(x) = x^{n-m}$ , 观察式子结构显然有

$$\begin{cases} \text{When } n > m, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0; \\ \text{When } n = m, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; \\ \text{When } n < m, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \end{cases}$$

2-7 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ ;

解 注意到此处自变量  $x$  趋近于 0, 因此考虑等价无穷小性质进行替换, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) = x^2 \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

2-8 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x}$ ;

解 观察此极限, 容易看出  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{5x + 3}$  不容易求解, 因此考虑利用等价无穷小的性质进行代换:

$$\text{有 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{5x + 3} \sin \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - 5}{5x + 3} \cdot \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 10}{5x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{10}{x^2}}{5 + \frac{3}{x}} = \frac{6}{5}$$

2-9 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2 \sin^3 x}$ ;

解 观察此极限, 容易注意到分母为多项式, 因此应转化为可应用洛必达法则的多项式进行求解

$$\text{运用洛必达法则, 有 } \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x + \sin x}{3(\sin 2x \cos x - \sin^3 x)}, \text{ 将}$$

$x=0$  代入, 得  $\frac{1}{4}$ 。

2-10 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \tan 3x \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ ;

解 注意到此处  $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$ , 不符合等价无穷小的替代性质, 同时考察所求式形式, 不难想到此处应使用三角恒等变换进行化简, 有

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{\tan\left[3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right]} = \frac{\frac{\pi}{6} - x}{3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} = \frac{1}{3}.$$

注意 在此处应特别注意等价无穷小的替代性质有  $x \rightarrow 0$  的限制。

2-11 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)^2}$ ;

解法一 同 2-10 题所述, 此处亦应利用三角恒等变换进行转化, 根据余弦函数的三角恒等变换不难推出

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi - \pi x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\pi - \pi x)^2}{(x-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

解法二 此题亦可使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

注意 此处应对分子分母同时求二阶导数, 否则无法代入极限处值

规律 在等价无穷小常见公式明显的情况下应使用等价无穷小的替换, 并时刻注意  $x \rightarrow 0$  的限制条件。

### Question 3 函数与极限 – 无穷小的比较

证明: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin^2 x$  是  $x$  的高阶无穷小。

证明 根据高阶无穷小的定义可得, 若要证明  $\sin^2 x$  是  $x$  的高阶无穷小, 只要证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0;$$

$$\text{由等价无穷小我们知道, } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 \times 0) = 0;$$

Q.E.D.

### Question 4 函数与极限 – 重要极限

4-1 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \right) (\beta \neq 0)$ ;

解 显然  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$ 。

4-2 求解极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} (x \neq 0, x \text{ is constant})$

解 注意到多项式中多次出现  $2^n$ ，因此不难想到将此多项式进行配凑，然后进行分别求导（同问题 2-5），有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot x \right) = x。$$

4-3 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cot \sqrt{x}$ ；

解 由  $\cot \sqrt{x}$  可以想到，此题为关于与三角函数有关的重要极限，因此围绕三角形进行配凑，不难想出，有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}}{\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \sqrt{x} = 1$$

4-4 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ ；

解 注意到  $1 - \cos 2x$  可以联想到升幂公式  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ ，因此显然有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2。$$

规律 在极限涉及三角函数时，应及时联想到重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，同时应注意到等价无穷小  $\sin x \sim x$  由此公式推导而来。

4-5 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ ；

解 观察此式形式，可知应运用含有  $e$  的重要极限进行求解，注意到分母中含有系数 2，显然配凑，有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}。$$

4-6 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} (k \neq 0)$ ；

解 此题易联想至习题 4-5 的同类问题，因此不难想出有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{-k} = e^{-k}$$

规律 在遇见  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{ax}\right)^{bx} (a, b \neq 0)$  形式时应想到  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  此重要不等

式，同时此形式还可拓展为  $\lim_{x \rightarrow C} (a - bx)^{\frac{1}{cx-d}}$  的形式（其中  $\lim_{x \rightarrow C} (a - bx) = 1$ ）。

如：

4-7 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$ ;

解 由规律不难看出  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1-3x)^{-\frac{1}{3x}} \right]^{-3} = e^{-3}$ 。

4-8 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ ;

解 根据习题 4-7 所得经验, 不难看出有

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (1-x)]^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}。$$

### Question 5 函数的极限 – 极限的夹逼准则

5-1 利用极限夹逼存在准则, 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$ ;

证明 根据根式的限制条件, 易知  $n > 1$ , 下面利用极限夹逼准则讨论:

当  $x > 0$  时, 有  $1 < \sqrt[n]{1+x} < 1+x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x) = 1$ , 由夹逼准则有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{1+x} = 1;$$

当  $x < 0$  时, 有  $1+x < \sqrt[n]{1+x} < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x) = 1$ , 由夹逼准则有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{1+x} = 1;$$

因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$  成立。

Q.E.D.

5-2 利用极限夹逼存在准则, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ ;

证明 观察等式, 放缩有  $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{2}{n}$ , 又有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ ;

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$  成立。

Q.E.D.

### Question 6 函数的性质 – 函数的连续性

6-1 求函数  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$  的连续区间, 并求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ;

解 将分母分解因式可得  $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ , 显然分母不等于 0, 因此此函数有间断点  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$ ;

根据所学知识, 我们知道初等函数及其复合函数在其定义域内连续, 因此易得此函数有且仅有  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$  两个间断点, 即函数在  $(-\infty, -3)$ ,  $(-3, 2)$  和  $(2, +\infty)$  上连续。

在定义域内化简, 有  $f(x) = \frac{(x+3)(x^2-1)}{(x-2)(x+3)}$ , 因此根据要求对其求极限, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{x-2} = -\frac{8}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

**规律** 在无特殊规定或特殊物理意义的情况下, 基本初等函数的间断点仅存在于定义域之外。

6-2 下列函数在指出点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如是可去间断点, 则补充或改变函数定义使其连续:

$$6-2-1 \quad y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}, \quad x=1, x=2;$$

$$6-2-2 \quad y = \frac{x}{\tan x}, \quad x=k\pi, x=k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

**解** 6-2-1

化简原函数有  $y = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$ , 又有  $\lim_{x \rightarrow 1} y = -2$ , 因此有  $x=1$  为原函数的可去间断点, 可补充条件  $f(1) = -2$ ; 同时有  $\lim_{x \rightarrow 2} y = \infty$ , 因此有  $x=2$  为原函数的无穷间断点。

6-2-2 根据  $k$  的取值进行讨论

当  $k=0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ , 因此  $x=0$  是原函数的可去间断点, 此时可补充条件  $f(0) = 1$ ;

当  $k \neq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow k\pi} y = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty$ , 因此  $x=k\pi, k \neq 0$  是原函数的无穷间断

点;  $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} y = \lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$ , 因此  $x=k\pi + \frac{\pi}{2}, k \neq 0$  是原函数的可去间

断点, 可补充条件  $f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ 。

6-3 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $0 \leq f(x) \leq 1$ , 试证: 至少存在一点  $c, c \in [0, 1]$  使得  $f(c) = c$ ;

**证明** 设  $F(x) = f(x) - x$ , 显然有  $F(x) \in [0, 1]$ , 且  $F(0) = f(0) \geq 0, F(1) = f(1) - 1 \leq 0$ , 因此有

- (i) 若  $F(0) = 0$ , 则  $\exists c = 0$  使得  $f(c) = c$   
(ii) 若  $F(1) = 0$ , 则  $\exists c = 1$  使得  $f(c) = c$   
(iii) 若  $F(0) > 0, F(1) < 0$ , 则由零点定理有  $\exists c \in [0, 1]$  使得  $F(c) = f(c) - c = 0$ .

因此 至少存在一点  $c, c \in [0, 1]$  使得  $f(c) = c$ ;

Q.E.D.

### Question 7 函数与导数 – 导数的定义

7-1 根据导数的定义证明  $(\cos x)' = -\sin x$ ;

证明 已知导数的定义为  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , 因此

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= -\cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} - \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= -\cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x} - \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= -\frac{1}{2} \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) - \sin x \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

因此  $(\cos x)' = -\sin x$  是成立的。

Q.E.D.

7-2 设  $f(x) = \ln(x+1)$ , 按导数的定义求  $f'(0)$ ;

解 由导数的定义, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(0+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

### Question 8 函数与导数 – 导数的存在性

讨论  $y = |\sin x|$  在  $x = 0$  处的连续性与可导性;

解 显然  $y = |\sin x|$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 下面讨论可导性:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} y &= \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y &= \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x} = -1 \neq 1 \end{aligned}$$

因此函数  $y = |\sin x|$  在  $x = 0$  处连续但不可导。

**规律** 证明函数在任一点的可导性, 可从函数的左右两边分别求函数的左右极限, 如函数的左右极限相等即为可导。

### Question 9 函数与导数 – 求导法则

设  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ , 其中  $\mu, \sigma > 0$  为常数, 求出使  $f'(x) = 0$  的  $x$  值;

**解** 对函数

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)', \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{-(x-\mu)}{\sigma^2} \\ &= -\frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

**注意** 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  被称为正态分布的概率密度曲线, 当  $\mu = 0, \sigma = 1$

时此函数被称为标准正态分布, 即  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 。

### Question 10 函数与导数 – 高阶导数

10-1 设  $y = x^2 e^{2x}$ , 求  $y^{(10)}$ ;

**解** 注意到本题考查高阶导数的求导, 因此使用莱布尼茨公式, 有

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= (x^2 e^{2x})^{(10)} = C_{10}^0 (x^2)^{(0)} (e^{2x})^{(10)} + C_{10}^1 (x^2)^{(1)} (e^{2x})^{(9)} + \dots + C_{10}^{10} (x^2)^{(10)} (e^{2x})^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{(10-k)} \\ &= 2^{10} e^{2x} \left( x^2 + 10x + \frac{45}{2} \right) \end{aligned}$$

10-2 验证函数  $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda, C_1, C_2$  是常数, 满足关系式  $y'' - \lambda^2 y = 0$ ;

**验证** 求函数的二阶导数:  $y'' = (C_1 \lambda e^{\lambda x} - C_2 \lambda e^{-\lambda x})' = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}$ ;

因此, 有  $y'' - \lambda^2 y = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x} - \lambda^2 (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) = 0$ 。

**因此** 原函数成立。

### Question 11 中值定理

11-1 验证罗尔定理对函数  $y = \ln \sin x$  在区间  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$  上的正确性;

**验证** 首先验证函数对罗尔定理的适用性：显然初等函数  $y = \ln \sin x$  在区间  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  上连续且可导，因此函数适用罗尔定理；

下面验证正确性： $\ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \sin \frac{5\pi}{6} = -\ln 2$  符合罗尔定理要求；

**因此** 罗尔定理在此函数此区间上是正确的。

Q.E.D.

**规律** 验证或证明命题时，应该从命题的充分性和必要性、此命题对于定理的适用性三方面说明该命题的正确与否或者定理是否正确。

11-2 验证拉格朗日中值定理对函数  $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$  在区间  $[0, 1]$  上的正确性；

**验证** 首先验证函数对拉格朗日中值定理的适用性：显然函数  $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$  在区间  $[0, 1]$  上连续且在  $(0, 1)$  上可导，符合拉格朗日中值定理条件，

下面证明正确性：已知  $f(1) = -2$ ,  $f(0) = -2$ ,  $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$ ，因此

要使  $f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0$ ，则有  $\zeta = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0, 1)$ ；

**因此** 拉格朗日中值定理对函数  $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$  在区间  $[0, 1]$  上成立。

Q.E.D.

11-3 证明恒等式  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ；

**证明** 设  $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ ，对此函数进行求导，有

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

因此此函数为定值；在定义域内任意取值  $x = 0$  代入，得  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ ；

**因此** 恒等式  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  成立。

Q.E.D.

11-4 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  上可导，证明：至少存在一点  $\zeta \in (a, b)$  使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta);$$

**证明** 考察所证式子特征，不难想到构造函数  $F(x) = xf(x)$ ，显然  $F(x)$  在  $(a, b)$  内可导，满足拉格朗日中值定理，因此有  $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\zeta)$ ；

显然  $F'(x) = xf'(x) + f(x)$ ，因此代入可得  $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta)$ ；

**因此** 至少存在一点  $\zeta \in (a, b)$  使得  $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta)$  成立

Q.E.D.

**注意** 满足各项中值定理的先决条件是在定义的闭区间内连续, 在定义的开区间内可导, 在题目中必须声明此条件!

### Question 12 中值定理 – 洛必达法则

12-1 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} (a > 0, b > 0, a \neq b)$ ;

**解** 观察分子分母, 观察到此为  $\frac{0}{0}$  型未定式, 因此选用洛必达法则进行求解, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x \ln a - b^x \ln b = \ln a - \ln b = \frac{a}{b}。$$

12-2 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sin(x - 2)}$ ;

**解法一** 观察此式, 发现为三角函数与初等函数的混合式, 因此考虑使用等价无穷小替

$$\text{换为} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1;$$

**解法二** 观察分子分母, 观察到此为  $\frac{0}{0}$  型未定式, 因此亦可选用洛必达法则进行求解,

$$\text{有} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{\cos(x-2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x-5)}{\lim_{x \rightarrow 2} \cos(x-2)} = -1;$$

12-3 求解极限  $\lim_{x \rightarrow \theta} \frac{\sin x - \sin \theta}{x - \theta}$ ;

**解** 观察分子分母, 观察到此为  $\frac{0}{0}$  型未定式, 因此可选用洛必达法则进行求解, 有

$$\lim_{x \rightarrow \theta} \frac{\cos x}{1} = \cos \theta;$$

**规律** 在一个等式中, 洛必达法则可以重复使用多次, 分子分母的高阶导数与原式满足的条件相同。

12-4 验证极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$  存在, 但不能由洛必达法则求得;

**验证** 首先验证极限的存在性:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \text{ 因此极限存在};$$

下面验证极限无法使用洛必达法则求得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}, \text{ 此时无}$$

法求出极限, 因此此函数无法使用洛必达法则求得极限;

因此 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$  存在, 但不能由洛必达法则求得。

### Question 13 函数 – 函数的极值和拐点

13-1 证明不等式  $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} (x > 0)$ ;

证明 对于复合函数的求解, 不难想到可以构造函数解决, 设

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}, \text{ 如要满足题设条件, 则可以将其等价转化为}$$

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x} > 0 \text{ 恒成立;}$$

下面验证  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x} > 0$  恒成立的正确性: 对函数进行求导

$$\text{有 } f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - \arctan x}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - \frac{1+x}{1+x^2} + \arctan x}{(x+1)^2}, \text{ 显然 } \frac{1+x}{1+x^2}$$

恒小于 1, 因此  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $x > 0$  上单调递增, 因此  $f(x) > f(0) = 0$

因此  $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x} (x > 0)$  成立。

Q.E.D.

13-2 要造一个圆柱形油罐, 体积为  $V$ , 问底半径  $r$  和  $h$  各等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解 已知圆柱的表面积公式  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ , 观察到  $r$  与  $h$  为两个不同的变量, 而显然此问题需要转化为单变量问题进行研究, 因此可以将  $h$  用  $r$  表示, 由

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}, \text{ 将 } h \text{ 代入 } S \text{ 中有 } S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r},$$

要使表面积最小, 因此研究  $S$  的最小值, 有  $S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$ , 可以轻松求

$$\text{出其唯一驻点 } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ 验证 } S'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3} \Rightarrow S'' \Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = 12\pi > 0, \text{ 因此}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ 为最小值点, 此时 } h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

因此 当  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ,  $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  时圆柱表面积最小, 此时直径与高的比为 1:1.

### Question 14 不定积分 – 不定积分的运算

14-1 求解不定积分  $\int \sqrt{x} \sqrt{x} dx$ ;

解 根据基本积分公式, 有  $\int \sqrt{x}\sqrt{x} \, dx = \int \left[ \left( x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \int \left( x^{\frac{3}{4}} \right) dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}};$

规律 遇见根式时, 应想到转化为指数式的形式, 利用积分表里的基本积分公式进行运算。

14-2 求解不定积分  $\int (x^2 - 3x + 2) dx;$

解 根据不定积分的四则运算, 有

$$\int (x^2 - 3x + 2) dx = \int x^2 dx - \int -3x dx - \int 2 dx + C = \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x + C$$

14-3 求解不定积分  $\int \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$

解 观察被积式, 可以观察到  $\frac{1}{1+x^2}$  和  $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$  两个鲜明特征, 又观察到系数 1 与

$$3, \text{ 因此考虑 } \int \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2 \arctan x + 3 \arcsin x + C;$$

注意 被积分式的常数在积分式中均表达为每个单项式前的系数, 而非未知数  $x$  前的系数。

每个积分后面均应加上常数  $C$ 。

14-4 求解不定积分  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx;$

解 根据高中学过的数列知识, 不难想出化简此式为  $\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1},$

$$\text{则有 } \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C。$$

14-5 求解不定积分  $\int \sec x (\sec x + \tan x) dx;$

解 显然对于复合三角函数, 很难直接使用积分公式进行求解, 因此应想办法化简

$$\text{此式, 有 } \int \sec x (\sec x + \tan x) dx = \int \frac{1 + \tan x \cos x}{\cos^2 x} dx, \text{ 继续化简, 有}$$

$$\int \frac{1 + \tan x \cos x}{\cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\cos x} \right) dx = \tan x + \sec x + C。$$

14-6 求解不定积分  $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx;$

解 显然对于上下不同的高次根式, 很难直接使用积分公式进行求解, 因此应考虑

$$\text{化简此式, 有 } \int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx = \int \left( x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx, \text{ 逐项进行积分, 有}$$

$$\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 - 3x + 3 \ln|x| + \frac{1}{x} + C;$$

**注意** 考虑到定义域的差别, 应特别注意  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 。

14-7 求解不定积分  $\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$ ;

**解** 将此积分拆解, 有  $\int \left( \frac{2x^4}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx$ ; 单独分析每个积分, 有

$$\int \frac{2x^4}{x^2 + 1} dx = 2 \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + C;$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = -\arctan x + x + C;$$

$$\int \frac{3}{x^2 + 1} dx = 3\arctan x + C;$$

因此, 将其累加, 得  $\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx = \frac{2x^3}{3} - x + 4\arctan x + C$ 。

14-8 求解不定积分  $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$ ;

**解** 观察式子, 显然可以想到升幂公式  $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ , 因此有

$$\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C;$$

14-9 求解不定积分  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ ;

**解** 显然, 有  $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = -\cot x - \tan x + C$ 。

14-10 求解不定积分  $\int \cot^2 x dx$ ;

**解** 观察, 有  $\int \cot^2 x dx = \int -1 + \csc^2 x dx = -x - \cot x + C$ ;

**注意** 在解决和三角函数有关的不定积分问题时, 应牢记积分表中的基本积分公式, 并将三角函数转化为基本积分公式中的形式。

14-11 求解不定积分  $\int e^x \left( 1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx$ ;

**解** 观察被积分式, 不难发现  $\int e^x \left( 1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left( e^x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ , 运用积分表中的公式, 易得  $\int e^x \left( 1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx = e^x - 2\sqrt{x} + C$ 。

14-12 证明函数  $\arcsin(2x-1)$ ,  $\arccos(1-2x)$  和  $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$  都是  $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$  的原函数。

**证明** 对三个函数分别求导, 显然三个函数的导数均等于  $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ ;

**因此** 这个结论是正确的。

Q.E.D.

**注意** 此结论还可以通过不定积分进行反向验证:

**验证** 首先求得  $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}} dx$ , 注意到这是一个复杂的符

合函数, 因此记  $u = x - \frac{1}{2}$  并化简, 得  $2 \int \frac{1}{\sqrt{-4u^2+1}} du$ , 运用三角换元, 可

得  $\arcsin v, v = x - \frac{1}{2}$ ;

将换元所得的  $u$ 、 $v$  代回, 得  $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = \arcsin(2x-1) + C$ , 因此可得

$\arcsin(2x-1)$  是  $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$  的一个原函数;

### Question 15 积分 – 第一类换元法

15-1 求解不定积分  $\int (2x-1)^{100} dx$ ;

**解** 显然, 有  $\int (2x-1)^{100} dx = \int u^{100} du, u = 2x-1$ , 因此

$$\int u^{100} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{101}}{101} + C = \frac{(2x-1)^{101}}{202} + C;$$

**规律** 对于常系数的凑微分 (第一类换元法), 显然需要配凑常数的倒数从而消掉系数。

15-2 求解不定积分  $\int \frac{1}{3x+4} dx$ ;

**解** 根据上述规律, 有  $\int \frac{1}{3x+4} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+4| + C$ 。

15-3 求解不定积分  $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$ ;

**解** 观察可得  $(x^2+3x)' = 2x+3$ , 因此有  $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \ln|x^2+3x| + C$ 。

15-4 求解不定积分  $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ ;

**解** 观察等式, 注意到  $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx$ , 观察式子的形式, 可以设  $u = x+1$ , 因此原式转化为  $\int \frac{1}{u+1} du$ , 显然满足基本积分表中的积分, 有  $\int \frac{1}{u+1} du = \arctan u + C$ , 代回  $x$  有  $\arctan(x+1) + C$ ;

**规律** 对于有加减的四则运算, 可以将一个部分看作一个整体  $u$  取代原来的  $x$ 。

15-5 求解不定积分  $\int \frac{1}{4x^2+9} dx$ ;

**解** 观察分母, 发现有  $\int \frac{1}{4x^2+9} dx = \int \frac{1}{(2x)^2+3^2} dx$ , 显然此等式满足常见积分  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ , 因此有  $\int \frac{1}{4x^2+9} dx = \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{d(2x)} + C = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C$ 。

15-6 求解不定积分  $\int \frac{2x}{x^2+4x+5} dx$ ;

**解** 观察被积分式, 有  $\int \frac{2x}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{2x}{(x+2)^2+1} dx = 2 \int \frac{x}{(x+2)^2+1} dx$ , 此式较为复杂, 但不难看出应换元  $u = x+2$ , 得  $2 \int \frac{u-2}{u^2+1} du$ , 化简含  $u$  的式子, 有  $2 \int \left( \frac{u}{u^2+1} - \frac{2}{u^2+1} \right) du = 2 \left( \frac{1}{2} \ln|u^2+1| - 2 \arctan u + C \right)$ , 将  $u = x+2$  代入, 有  $\int \frac{2x}{x^2+4x+5} dx = \ln|x^2+4x+5| - 4 \arctan(x+2) + C$ 。

15-7 求解不定积分  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;

**解** 显然有  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin \sqrt{x} d(\sqrt{x}) = -2 \cos \sqrt{x} + C$ 。

15-8 求解不定积分  $\int x\sqrt{1+x^2} dx$ ;

**解** 显然有  $\int x\sqrt{1+x^2} dx = \int \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} d(x^2+1) = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ ;

**规律** 对于第一类换元法有  $\int f(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C$ , 其中  $F'(x) = f(x)$ , 亦可看作  $F(x) = f^{-1}(x)$ , 即  $F(x)$  是  $f(x)$  的反函数。

15-9 求解不定积分  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} dx$ ;

解 本题可设  $u = 2 - 3x$ , 有

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}} d^{-1}(2-3x) = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + C, \text{ 将}$$
$$u = 2 - 3x \text{ 代入, 有 } \int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} dx = -\frac{1}{2} (2-3x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

15-10 求解不定积分  $\int \frac{1}{x(2+3\ln x)} dx$ ;

解 原式可转化为

$$\int \frac{1}{x(2+3\ln x)} dx = \int \frac{1}{2+3\ln x} d^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{2+3\ln x} d(2+3\ln x), \text{ 可求得}$$
$$\text{原式 } \int \frac{1}{x(2+3\ln x)} dx = \frac{1}{3} \ln|2+3\ln x| + C;$$

注意 由习题 15-1、习题 15-8 的规律可得出本题的第二个等号, 另外值得注意的是, 在第一类换元法中, 由于所换的“元”通常是积分较为明显的式子, 因此

$$\int \frac{1}{2+3\ln x} d^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ 常常直接写作 } \int \frac{1}{2+3\ln x} d(\ln x).$$

15-11 求解不定积分  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ ;

解法一 转化此不定积分, 有  $\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \left(-\frac{e^x}{1+e^x} + 1\right) dx$ , 其中  $\int -\frac{e^x}{1+e^x} dx =$

$$-\int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -\ln(e^x+1) + C,$$

$$\text{则显然 } \int \frac{1}{1+e^x} dx = -\ln(1+e^x) + x + C;$$

解法二 分子分母同乘  $e^{-x}$ , 有

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\int \frac{d(e^{-x})}{e^{-x}+1} = \ln(e^{-x}+1) + C.$$

15-12 求解不定积分  $\int \frac{1}{e^{-x}+e^x} dx$ ;

解 本题显然可设  $u = e^x$ , 因此有  $\int \frac{1}{u+\frac{1}{u}} du = \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u + C$ , 将

$$u = e^x \text{ 代入, 得 } \int \frac{1}{e^{-x}+e^x} dx = \arctan(e^x) + C.$$

15-13 求解不定积分  $\int \cos^2 2x dx$ ;

解 由平方联想到降幂, 有  $\int \cos^2 2x dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$ , 由基本积分公式可得

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} x + \int \frac{\cos 4x}{8} d(4x) + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

15-14 求解不定积分  $\int \sin x \cos^4 x \, dx$ ;

解 显然有  $\int \sin x \cos^4 x \, dx = \int \cos^4 x \, d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$ 。

15-15 求解不定积分  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx$ ;

解 观察分子, 可见分子为高次幂, 考虑拆分, 有  $\frac{\sin^3 x}{\cos x} = \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{\cos x}$ , 因此

有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \, d(\cos x) = \int \left( \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) d(\cos x) \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

15-16 求解不定积分  $\int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx$ ;

解 化简原式可得  $\int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx = \int \frac{\sec x}{\sin x} \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \, d(\tan x) = \ln |\tan x| + C$

### Question 16 积分 - 第二换元法

16-1 求解不定积分  $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} \, dx$ ;

解 根据第二换元法, 可令  $t = \sqrt{2x+1}$ , 即  $x = \frac{t^2-1}{2}$ , 此时  $dx = t \, dt$ , 因此有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} \, dx &= \int \frac{2t}{t^2-1} \cdot t \, dt = 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} \, dt = 2 \int \left( 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) \, dt \\ &= 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \end{aligned}$$

将  $t = \sqrt{2x+1}$  代入, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x} \, dx &= 2\sqrt{2x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| + C \\ &= 2\sqrt{2x+1} + \ln |\sqrt{2x+1}-1| - \ln |\sqrt{2x+1}+1| + C \end{aligned}$$

(两答案等价)

16-2 求解不定积分  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} \, dx$ ;

解 根据第二换元法, 令  $t = \sqrt{x-1}$ , 则  $x = t^2 + 1$ ,  $dx = 2t dt$ , 因此有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{1}{1+t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t}{1+t} dt \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2[t - \ln(1+t)] + C\end{aligned}$$

将  $t = \sqrt{x-1}$  代入, 有  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{x-1} - 2\ln(1+\sqrt{x-1}) + C$

16-3 求解不定积分  $\int \sqrt{9-4x^2} dx$ ;

解法一 由第二换元法易知, 可设  $2x = 3\sin t$ , 即  $x = \frac{3\sin t}{2}$ , 此时  $dx = \frac{3}{2}\cos t dt$ , 因

此原式可以化简为

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-4x^2} dx &= \int \sqrt{9-9\sin^2 t} \cdot \frac{3}{2}\cos t dt = \int 3\cos t \cdot \frac{3}{2}\cos t dt \\ &= \int \frac{9}{2}\cos^2 t dt = \frac{9}{2} \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\end{aligned}$$

由第一步可知  $t = \arcsin \frac{2}{3}x$ , 则

$$\int \sqrt{9-4x^2} dx = \frac{9}{4}t + \frac{9}{4}\sin 2t = \frac{9}{4}\arcsin \frac{2}{3}x + \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin \frac{2}{3}x\right) + C$$

规律 在遇到  $\sqrt{a^2 \pm x^2}$  时, 应想到使用第二类换元法, 此结论还可以扩展至  $\sqrt{a \pm bx}$  类型。

此题还可以使用另一种解法:

解法二 将原式化简有  $\int \sqrt{9-4x^2} dx = \int 3\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2} dx$ , 令  $\frac{2}{3}x = \sin t$ , 此时

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 即 } x = \frac{3}{2}\sin t, \text{ 此时 } dx = \frac{3}{2}\cos t dt;$$

因此有  $\int \sqrt{9-4x^2} dx = \int 3\cos t \cdot \frac{3}{2}\cos t dt = \frac{9}{4} \int (1+\cos 2t) dt$ , 化简该式, 有

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-4x^2} dx &= \frac{9}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{9}{4}(1 + \sin t \cos t) + C \\ &= \frac{9}{4} \left(\arcsin \frac{2x}{3} + \frac{2x}{3}\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}\right) + C \\ &= \frac{9}{4}\arcsin \frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-4x^2} + C\end{aligned}$$

(两结果等价)

16-4 求解不定积分  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx$ ;

解 观察题目可得, 令  $x = \tan t$ , 此时  $dx = \sec^2 t dt$ , 此时  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 因此有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t \sec t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t} d(\sin t) \\ &= -\frac{1}{\sin t} + C = -\csc t + C = -\csc(\arctan x) + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C\end{aligned}$$

16-5 求解不定积分  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx$ ;

解法一 由第二类积分法不难看出, 令  $x = \sin t$ , 即  $t = \arcsin x$ , 此时  $dx = \cos t dt$ , 因此可以将原式化简为  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} \cdot \cos t dt$ , 化简可

$$\begin{aligned}\text{得 } \int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{1 + \sqrt{\cos^2 t}} \cdot \cos t dt = \int \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt, \text{ 因此, 有} \\ \int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx &= \int \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1 + \cos t}\right) dt \\ &= t - \int \frac{1}{1 + \cos t} dt = t - \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = t \int \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} d\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= t - \tan \frac{t}{2} + C\end{aligned}$$

将  $t = \arcsin x$  代入, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx &= \arcsin x - \tan\left(\frac{\arcsin x}{2}\right) + C \\ &= \arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C\end{aligned}$$

(两结果等价)

此题还可使用代数方法解答

解法二 化简, 有  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1^2 - (\sqrt{1 - x^2})^2} dx$ , 对于减数和被减数分别

积分, 有  $\int \frac{1}{1^2 - (\sqrt{1 - x^2})^2} dx = \int \frac{1}{1 - 1 + x^2} dx = -\frac{1}{x}$ , 并且

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} &= -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \arcsin x \text{ (第二类换元法)}, \text{ 两式相减, 有} \\ \int \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx &= \arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C.\end{aligned}$$

16-6 求解不定积分  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$ ;

解 观察原式, 可令  $x = 3\sec t$ , 化简有

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{9\sec^2 t-9}}{3\sec t} d(3\sec t) = 3 \int \tan^2 t dt \\&= 3 \int \left( \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = 3 \tan t - 3t + C \\&= \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C\end{aligned}$$

16-7 求解不定积分  $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$ ;

解 为使此等式更加直观, 可将原式转化为  $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ ,

由此等式, 令  $x = \sin t$ , 此时  $dx = \cos t dt$ , 因此

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \sec^2 t dt = \tan t + C, \text{ 将 } x = \sin t \text{ 代入, 有} \\ \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx &= \tan(\arcsin x) + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.\end{aligned}$$

规律 对于三角换元的不定积分, 有以下规律:

对于 积分  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ,

可 令  $x = a \sin \theta$ ,  $dx = a \cos \theta d\theta$ ,  $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ ,

此时 积分变为  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{a \cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$ ;

对于 积分  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$ ,

可 令  $x = a \tan \theta$ ,  $dx = a \sec^2 \theta d\theta$ ,  $\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ ,

此时 积分变为

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^2(1+\tan^2 \theta)} = \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^2 \sec^2 \theta} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

对于 积分  $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$ ,

可 令  $x = a \sec \theta$ ,  $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ ,  $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$ ,

此时 积分变为  $\int \sqrt{x^2-a^2} dx = a^2 \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta$ 。

## Question 17 积分 - 分部积分法

17-1 求解不定积分  $\int x \sin x dx$ ;

解 显然有  $\int x \sin x dx = -\int x d(\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx = -\cos x + \sin x + C$

17-2 求解不定积分  $\int x \arccos x dx$ ;

解 显然有  $\int x \arccos x dx = \int x d\left(-\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$ , 化简, 有

$$\begin{aligned}\int x \arccos x dx &= \frac{1}{2} x^2 \arccos x + \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{1}{8} \sin(2 \arcsin x) + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arccos x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{1}{4} \arcsin x + C\end{aligned}$$

17-3 求解不定积分  $\int x^2 \cos x dx$ ;

解 显然有  $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$ 。

17-4 求解不定积分  $\int x^2 e^x dx$ ;

解 显然有  $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = (x^2 - 2x + 1) e^x + C$ 。

17-5 求解不定积分  $\int x^2 \arctan x dx$ ;

解 显然有

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan x dx &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \int \frac{x^3}{3(x^2+1)} dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan x - \frac{1}{6} (x^2 + 1 - \ln|x^2 + 1|) + C\end{aligned}$$

17-6 求解不定积分  $\int x \ln^2 x dx$ ;

解 显然有  $\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x dx$ , 化简有

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{x^2}{4} + C。$$

17-7 求解不定积分  $\int x \cos \frac{x}{2} dx$ ;

解 显然有  $\int x \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int x \cos \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \int x d\left(\sin \frac{x}{2}\right)$ , 化简, 有

$$\begin{aligned}\int x \cos \frac{x}{2} dx &= 2 \int x d\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 2x \sin \frac{x}{2} - 2 \int \sin \frac{x}{2} dx = 2x \sin \frac{x}{2} - 4 \int \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

17-8 求解不定积分  $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$ ;

解 显然有

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2} dx &= -\frac{\arctan x}{x} - \int -\frac{1}{x(x^2+1)} dx \\ &= -\frac{\arctan x}{x} - \left(\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1|\right) + C \\ &= -\frac{\arctan x}{x} - \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C\end{aligned}$$

17-9 求解不定积分  $\int x \tan^2 x dx$ ;

解 显然有

$$\begin{aligned}\int x \tan^2 x dx &= x(-x + \tan x) - \int (-x + \tan x) dx \\ &= -x^2 + x \tan x - \left(-\frac{x^2}{2} - \ln|\cos x|\right) = -x^2 + x \tan x + \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| \\ &= -x^2 + x \tan x + \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

17-10 求解不定积分  $\int x \ln(x^2+1) dx$ ;

解 显然有

$$\begin{aligned}\int x \ln(x^2+1) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(x^2+1) d(x^2+1) \\ &= \frac{1}{2} (x^2+1) \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \int (x^2+1) \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2+1) \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} x^2 + C\end{aligned}$$

规律 对待复杂的分部积分问题，可以在考试前或者考试后使用超星学习通请求朱耀亮老师捞捞自己。

### Question 18 定积分 – 定积分的定义和性质

18-1 证明定积分的性质  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ( $k$  是常数) ;

证明 根据定积分的定义，在闭区间  $[a, b]$  中插入  $(n-1)$  个点  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ，记  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ，任取  $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$ ，则

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{x \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \lim_{x \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx$$

因此 定积分具有该性质。

18-2 证明定积分的性质  $\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a$ ;

证明 本题设同 18-1 题条件, 可得

$$\int_a^b 1 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b - a) = b - a;$$

因此 定积分具有该性质。

18-3 利用定积分的定义计算积分  $\int_0^1 x dx$ ;

解 根据定积分的定义, 有  $\int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$ 。

18-4 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明  $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$ ;

证明 已知对于  $\forall t \in \mathbf{R}$ , 有  $(tf(x) - 1)^2 \geq 0$ , 因此有  $\int_0^1 (tf(x) - 1)^2 dx \geq 0$ , 即

$$\int_0^1 (t^2 f^2(x) - 2tf(x) + 1) dx \geq 0, \text{ 即 } t^2 \int_0^1 f^2(x) dx - 2t \int_0^1 f(x) dx + 1 \geq 0 \text{ 对}$$

$$\text{于 } t \in \mathbf{R} \text{ 恒成立, 因此 } \Delta \leq 0; \text{ 因此有 } 4 \left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^2 - 4 \int_0^1 f^2(x) dx \leq 0;$$

因此  $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$  在  $[0, 1]$  上成立。

### Question 19 定积分 - 微积分基本定理 - 牛顿-莱布尼茨公式

19-1 求解函数  $y = \int_0^{x^2} \ln(1+t) dt$  的导数;

解 显然有  $y' = \ln(1+x^2) (x^2)' = 2x \ln(1+x^2)$ 。

19-2 求解函数  $y = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$  的导数;

解 显然有  $y' = \sqrt{1+(x^2)^2} (x^2)' - \sqrt{1+(2x)^2} (2x)' = 2x\sqrt{1+x^4} - 2\sqrt{1+4x^2}$ 。

19-3 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ ;

解 观察式子, 发现其可运用洛必达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x \sin t^2 dt\right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

**注意** 在此类问题中, 应综合运用所学的所有极限、积分知识进行求解。

19-4 求解极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}$ ;

**解** 运用洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)}{\int_0^x t e^{2t^2} dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2x^2 + 1} = 2 \end{aligned}$$

19-5 求解定积分  $\int_0^1 (3x^2 - x + 1) dx$ ;

**解** 显然运用牛顿-莱布尼茨公式, 首先求解不定积分:

$$\int (3x^2 - x + 1) dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x, \text{ 因此有 } \int_0^1 (3x^2 - x + 1) dx = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

19-6 求解定积分  $\int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$ ;

**解** 化简, 有  $\int_{-1}^0 \left(3x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = (x^3 + \arctan x) \Big|_{-1}^0 = 1 + \frac{\pi}{4}.$

19-7 求解定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ ;

**解** 化简, 有  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$

19-8 求解不定积分  $\int_0^2 f(x) dx$ , 其中  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1 \end{cases}$ ;

**解** 原式等价于  $\int_0^1 (x+1) dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{8}{3}.$

19-9 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ ,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt, \quad x \in [a, b]$$

证明: 方程  $F(x) = 0$  在区间  $[a, b]$  上有且仅有一个根。

**证明** 有且仅有一个根, 此命题等价于:

**推论 1** 方程最多有一个根

**证明** 因为  $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0, f(x) > 0$

所以 方程  $F(x) = 0$  在区间  $[a, b]$  上最多有一个根;

**推论 2** 方程至少有一个根

**证明** 因为  $F(a) = \int_a^a f(t)dt + \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt = -\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt < 0;$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^b \frac{1}{f(t)}dt = \int_a^b f(t)dt > 0;$$

而  $F(x) \in [a, b],$

因此 方程  $F(x) = 0$  在区间  $[a, b]$  上至少有一个根;

因此 方程  $F(x) = 0$  在区间  $[a, b]$  上有且仅有一个根。

## Question 20 定积分 – 换元积分法

20-1 求解定积分  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)dx;$

**解** 换元, 可得  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)d\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 0.$

20-2 求解定积分  $\int_0^1 \frac{1}{(2+3x)^2}dx;$

**解** 化简, 有  $\int_0^1 \frac{1}{(2+3x)^2}dx = \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{1}{u^2}du, u = 2+3x,$  因此有

$$\int_0^1 \frac{1}{(2+3x)^2}dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{u}\right]_2^5 = \frac{1}{10}.$$

20-3 求解定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx;$

**解** 化简, 有  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3 x d(\cos x) = -\frac{1}{4} \cos^4 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}.$

20-4 求解定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$

**解** 显然想到降幂公式, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

20-5 求解定积分  $\int_0^{\pi} (1 - \sin^3 x) dx$ ;

解 显然此式可以化简为  $\pi - \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \pi - \int_0^{\pi} \sin x \sin^2 x dx$ , 因此有

$$\begin{aligned}\pi - \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin x dx &= \pi + \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= \pi + \left( \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi - \frac{4}{3}\end{aligned}$$

20-6 求解不定积分  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi$ ;

解 根据降幂公式, 显然有

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi,$$

$$\text{显然 } \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \text{ 化简有}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{24}.$$

20-7 求解定积分  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ;

解 显然有  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$ 。

20-8 求解定积分  $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ ;

解 显然使用换元积分法, 令  $x = \sin t$ , 有  $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$ , 因此有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt \\ &= -\cot t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

20-9 求解定积分  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$ ;

解法一 观察式子结构可以想到使用换元法, 令  $x = \tan t$ , 此时有

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t \sec t} \sec^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot t \csc t dt \\ &= -\csc t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

事实上, 本题还可以令  $x = \frac{1}{t}$ , 有

$$\begin{aligned}\text{解法二 } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt, \text{ 化简此式有} \\ \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= (-\sqrt{t^2+1}) \Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

20-10 求解定积分  $\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx$ ;

解 显然应使用换元法, 令  $t = \sqrt{x+1}$ , 此时  $dx = 2t dt$ , 因此原式可以转化为

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{1+t} \cdot 2t dt = 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 2[t - \ln(1+t)] \Big|_1^2 = 2\left(1 - \ln \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

注意 此处未涉及的题目, 可以参考问题 16 (不定积分), 结合牛顿-莱布尼茨公式自行解答。

20-11 求解定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$ ;

解 不难看出原式可以转化为  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$ ,

因此有  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \cdot |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx$ , 继续

化简, 有  $\frac{2}{3} (\cos x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \frac{2}{3} (\cos x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$ 。

20-12 求解定积分  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;

解 显然有  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x)$ ,

化简有  $\frac{2}{3}(\arcsin x)^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}$ .

### Question 21 定积分 – 分部积分法

21-1 求解定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$ ;

解 显然有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, d(\sin x) = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx \\&= \frac{\pi^2}{4} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, d(\cos x) = \frac{\pi^2}{4} + 2x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\&= \frac{\pi^2}{4} - 2\end{aligned}$$

21-2 求解定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$ ;

解 显然有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \, d(\sin x) = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot 2e^{2x} \, dx \\&= e^\pi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \, d(\cos x) = e^\pi + 2e^{2x} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{2x} \, dx \\&= e^\pi - 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{2x} \, dx = \frac{1}{5} (e^\pi - 2)\end{aligned}$$

21-3 求解定积分  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \, dx$ ;

解 显然此式应当分拆成两部分, 有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \, dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 -\ln x \, dx + \int_1^e \ln x \, dx \\&= -x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 x \cdot \frac{1}{x} \, dx + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\&= 2 \left( 1 - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

21-4 证明:  $\int_x^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} \, dt (x > 0)$ ;

证明 令  $t = \frac{1}{u}$ ,  $dt = -\frac{1}{u^2} du$ , 因此有

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\
&= \int_{\frac{1}{x}}^1 -\frac{1}{u^2+1} du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+u^2} du \\
&= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt
\end{aligned}$$

因此 此结论是成立的。

Q.E.D.

21-5 证明:  $\int_0^1 x^m (1-x^n) dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx (m, n \in \mathbf{N})$ ;

证明 令  $t = 1 - x$ , 有  $\int_0^1 x^m (1-x^n) dx = \int_1^0 (1-t)^m t^n (-dt) = \int_0^1 t^n (1-t)^m dt$

因此 此结论成立。

Q.E.D.

## 版权声明:

本资料基于《高等数学（经管类）》（杨明泉、郭献洲主编，上海交通大学出版社，2017）编写。本资料在编写过程中，参考了如下资料（个人/组织），在此想各资料版权持有人致以真挚的感谢：

[1] 南京工业大学数理科学学院；

[2] 高等数学（第七版上册，同济大学数学系编，同济大学出版社，2014）；

其余未声明版权的，均满足以下情况：

[1] 为作者原创内容；

[2] 所参考的出版物出版于 1926 年 1 月 1 日以前，或在美利坚合众国国境内出版于 1923 年 1 月 1 日以前；

[3] 所参考的书籍作者已去世逾 50 年；

[4] 其他根据《中华人民共和国著作权法》所规定的公版书。

作者对本资料申明版权保护，任何组织或个人在未经允许的情况下不得将本资料的全部或部分用作商业用途。

作者自愿对本资料的非商业用途进行开源，并基于 BRSP 协议（MD100014）、CC-BY-SA-3.0 协议文本（署名-相同方式共享-协议文本）在互联网渠道进行开源。使用者下载并使用视作赞同并同意遵守这两份文本协议。

作者允许在署名的情况下对本资料进行共享。对于已发现的滥用或盗版行为将取消其任何基于 BRSP 协议的开源文件获取权限。